APROKSYMACJA JEDNOSTAYNA

15.02-J 1

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągła.

Znaleźć wielomian $p_n(x)$ stopnia $\leq n$, taki że

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| \text{ jest możliwie najmniejszy.}$$

Ogólnie jest to ~~o~~ wiele trudniejszy problem niż zagadnienie aproksymacji w przestrzeni unitarnej.

Istnieje algorytm Remeza, który daje konstrukcję ciągu zbieżnego do elementu optymalnego.

Zadziwiająco skuteczne okazuje się być wielomiany Czebyszewa.

TW.

Niech $f \in C[-1,1]$, $E_n(f) = \min_{p \in \Pi_n} \|f - p\|$.

$\max |f(t) - p(t)|$

Niech $\alpha_k = \int_{-1}^{1} f(x) T_k(x)\, dx$

unormowany wielomian Czebyszewa

Wtedy $\| f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k \| \leq \left(\frac{4}{\pi^2} \ln n + 2.44 \right) E_n(f)$

Wyrażenie $\frac{4}{\pi^2}\ln n + 2.44 < 5$ dla $n \le 500$.

czyli przybliżenie wielomianem Czebyszewa ~~jest~~ daje błąd do 5 razy większy niż optymalne.

czyli tracimy nie więcej niż jednej cyfry dziesiętnej dokładności.

Jeszcze prościej:

Wielomiany interpolacyjne oparte na węzłach równych pierwiastkom wielomianów Czebyszewa.

TW.

Niech w_n będzie wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a funkcji $f \in C_{[-1,1]}$ opartym na węzłach będących pierwiastkami $(n+1)$-wielomianu Czebyszewa, tj. T_{n+1}, tzn. w punktach $x_k = \cos\frac{(2k-1)}{2n+2}\pi$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$.

Wtedy $\|f - w_n\| \le c_n E_n(f)$,

gdzie $c_n \le 4$ dla $n \le 20$, $c_n \le 5$ dla $n \le 100$

oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\ln n} = \frac{2}{\pi}$.

z tw. Weierstrassa

$E_n(f) \to 0$, ale zbieżność może być bardzo wolna.

Dla funkcji regularnych jest lepiej

TW.
Jeśli $\left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\right| \leq M$ dla $x \in [a,b]$,
to $E_n(f) \leq 2M \cdot \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$.

Zatem aby przybliżyć funkcję z zadaną dokładnością, wyliczam z powyższego n, a potem stosujemy dwa poprzednie tw..

APROKSYMACJA PADÉ

Zadanie:

$f:[a,b]\to R$ – gładka funkcja

$0\in[a,b]$

Znaleźć

$$r_{kl}(x)=\frac{p_k(x)}{q_l(x)}=\frac{a_kx^k+\ldots+a_1x+a_0}{b_lx^l+\ldots+b_1x+1}$$

tak aby $|f-r_{kl}|$ – mała w jakimś sensie.

APROKSYMACJA PADÉ

dobieramy $r_{kl}(x)$ tak aby

~~pochodne do rzędu $N=k+l$ i wartości funkcji~~

$$f^{(i)}(0)=r_{kl}^{(i)}(0)\qquad i=0,1,\ldots,N\ ,\quad N=k+l$$

Zauważmy, że mamy $N+1$ warunków i $N+1$ stałych: $a_k,\ldots,a_0,\ b_l,\ldots,b_1$

więc jest szansa.

Okazuje się, że jeśli $k=l$ lub $k=l+1$, to przy zadanym $N=k+l$ uzyskuje się najlepsze przybliżenia jednostajne.

LEMAT $N = l+k$ [illegible] 2

Jeśli $\left(f\cdot q_l - p_k\right)^{(i)}(0) = 0$ $i = 0,1,\dots,N$ to

$$\left(f - \frac{p_k}{q_l}\right)^{(i)}(0) = 0 \quad \text{dla } i = 0,1,\dots,N.$$

Dowód:

Bez straty ogólności mogę założyć, że f - wielomian stopnia N.

$$f(x) - \frac{p_k(x)}{q_l(x)} = \frac{f(x)q_l - p_k(x)}{1+b_1x+\dots+b_lx^l} =$$

$$= \left(f(x)\cdot q_l(x) - p_k(x)\right)\left(1 - (b_1x+\dots+b_lx^l) + (b_1x+\dots+b_lx^l)^2 - (\ )^3 \dots\right) =$$

jest to równość szeregów potęgowych

ten szereg zaczyna się od wyrazu $\tilde{c}_j x^{N+1} + \dots$

$$f(x)\cdot q_l(x) - p_k(x) = \sum_{j>N} \tilde{c}_j x^j$$

więc

$$= \sum_{j>N} d_j x^j$$

∎

Niech
$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$$

Lemat daje nam równania na współczynniki.

BRZYKŁAD:

$l=2$, $k=2$, $f(x)=c_4x^4+c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0$

$$f(x)\cdot q_l(x)-p_k(x)=\underbrace{(c_4x^4+c_3x^3+\ldots+c_0)}_{\text{wypisuję potęgi } x^i\ i\le 4}(b_2x^2+b_1x^1+1)-(a_2x^2+a_1x+a_0)$$

$$=x^4(c_4+c_3b_1+c_2b_2)+x^3(c_3+c_2b_1+c_1b_2)+$$
$$+x^2(c_2+c_1b_1+c_0b_2-a_2)+x(c_1+c_0b_1-a_1)+c_0-a_0$$

Mamy więc układ równań:

$$\begin{cases} c_3b_1+c_2b_2=-c_4 \\ c_2b_1+c_1b_2=-c_3 \end{cases}$$ wyższe potęgi

$$a_2=c_2+c_1b_1+c_0b_2$$
$$a_1=c_1+c_0b_1$$
$$a_0=c_0$$
niższe potęgi to po prostu wyliczamy

Układ ma rozwiązanie, gdy

$$\det\begin{bmatrix} c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{bmatrix}\neq 0$$

PADE 4

Ogólnie:

$$(c_N x^N + \dots + c_1 x_1 + c_0)(b_l x^l + \dots + b_1 x + 1) - (a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0)$$

x^N: $\quad c_N + c_{N-1} b_1 + c_{N-2} b_2 + \dots + c_{N-l} b_l = 0$

x^{N-1}: $\quad c_{N-1} + c_{N-2} b_1 + c_{N-3} b_2 + \dots + c_{N-l-1} b_l = 0$

$\vdots$

$\cancel{x^{N-k+1} \quad c_{N-k+1} + c_{N-k} b_1 + \dots + c_{N-k+1-l} b_l = 0}$

x^{k+1} $\quad c_{k+1} + c_k b_1 + c_{k-1} b_2 + \dots + c_{k-l} b_l = 0$, gdzie $c_j = 0$ dla $j < 0$

x^k $\quad c_k + c_{k-1} b_1 + \dots + c_{k-l-1} b_l - a_k = 0$

$\vdots$

$c_0 = a_0 = 0$

Najpierw rozwiązujemy układ (o ile się da).

$$\begin{bmatrix} c_{N-1} & c_{N-2} & \dots & c_{N-l} \\ c_{N-2} & c_{N-3} & & c_{N-l-1} \\ \vdots & & & \\ c_{k+1} & c_k & & c_{k-l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_l \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} +c_N \\ +c_{N-1} \\ \vdots \\ c_{k+1} \end{bmatrix}$$

a potem wyliczamy a_i

METODA NEWTONA

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ~~klasy~~ C^1

$$F(x) = x - Df(x)^{-1} f(x).$$

1° zbieżna, gdy startujemy blisko punktu $\bar{x}_*$, $f(\bar{x}_*)=0$

2° trzeba odwracać $Df(x)$, lub przynajmniej ~~odwrócić~~ obliczyć $Df(x)^{-1}f(x)$.

3° x_0 - musi być izolowany, tzn. nie może być ciągłej rodziny rozwiązań $f(x)=0$.

4° $F(x) = x - C f(x)$, $C \approx df^{-1}(\bar{x}_0)$ o ile x_0 - blisko $\bar{x}$

też jest zbieżna.

Modyfikacje metody Newtona:

1) $F(x) = x - \theta \cdot Df(x)^{-1} \cdot f(x)$, $\theta \approx 1$ - też jest zbieżna

θ - parametr

2) $Df(x)^{-1}$ - można mieć stałe przez kilka iteracji