METODY NUMERYCZNE II

(1)

1) PRZYPOMNIENIE Z ALG. LINIOWEJ.

Normy:

V - prz. wektorowa, $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$

Norma:

1) $\|x\| = 0$ wtw $x = 0$
2) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
4) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Tw. Zbieżności: $x_n \in V$ jest zbieżny do $x^* \in V$ wtw. $\|x_n - x^*\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

przykłady $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$: $|x|_\infty = \max |x_i|$ $\quad \|x\| = \sqrt{\sum |x_i|^2}$, $\quad |x|_1 = \sum |x_i|$

Tw.

Wszystkie normy na prz. skończenie wymiarowych są równoważne.

$| \ |_1, | \ |_2$ - dwie normy to

$\exists c_1, c_2 > 0$

$c_1 |x|_2 < |x|_1 \leq c_2 |x|_2$

czyli że zbieżności w jednej normie wynika zbieżność w drugiej i na odwrót.

Normy macierzy.

Niech $(\mathbb{K}^n, |\ |)$ - prz. z normą, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$

Niech $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ - definiujemy normę operatorową związaną z $|\ |$

$|A| = L$ wtw $|Ax| \leq L|x|$ $\forall_{x \in \mathbb{K}^n}$

i dla każdego L', t. że

$|Ax| \leq L'|x|$ $\forall_{x \in \mathbb{K}^n}$ zachodzi

$L \leq L'$.

$|A| = \max_{|x|=1} |A(x)|$.

W zależności od wyboru normy $|\ |$ dostajemy inną normę $|A|$.

Przyjemna własność w dowodach: $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Dowód:

$\|(A \cdot B) x\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$ $\blacksquare$

Inne możliwe normy:

$|A| = \max |A_{ij}|$ etc.

WEKTORY WŁASNE, PROMIEŃ SPEKTRALNY ETC.

Niech $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A = (a_{ij})$, I - mac. jednostkowa (Id)

DEF.

$\lambda \in \mathbb{C}$ nazywamy wartością własną macierzy A jeśli istnieje wektor $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, t. że

$$Ax = \lambda x.$$

~~Zatem~~ Wektor x nazywamy wektorem własnym stowarzyszonym z λ.

TW.

λ - jest wartością własną dla A, to

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

DEF.
Wielomian $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ nazywamy <u>wielomianem charakterystycznym</u> macierzy A.

Mamy:

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n \lambda^n - \lambda \cdot Tr(A) + \ldots + \det(A).$$

$\deg \varphi = n$, — n - pierwiastków zespolonych licząc z krotnościami.

Jeśli $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, to $\varphi(\lambda)$ - ma tylko współczynniki rzeczywiste,
więc jeśli $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartością własną A, to $\bar{\lambda}$ - też i wekt. wł. $\bar{x}$.

Dowód:
$Ax = \lambda x$, sprzężenia $A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$.

DEF.
<u>Promień spektralny A</u> $\rho(A) = \max\{|\lambda_i|\}$, λ_i - wart. wł. A

<u>STW.</u> $\rho(A) \leq |A|$, gdzie $|A|$ - norma operatorowa

TW.
Jeśli A i B są podobne ($A = P^{-1}BP$), to A, B mają ten sam wielomian charakterystyczny (i te same wartości własne).

UZUPEŁNIENIE Dowodu:

$\rho(A) \leq \|A\|$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

gdy maksymalna wartość własna jest zespolona

$\lambda = |\lambda|(\alpha + i\beta)$ $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

v, w – para własna , $\|v\| = 1$

$Av = |\lambda|(\alpha v - \beta w)$

$Aw = |\lambda|(\beta v + \alpha w)$

A – w zawężeniu do $\langle v, w\rangle \in$ pR. generowaną przez $\langle v, w\rangle$

jest obrotem o kąt φ i wydłużeniem o czynnik $|\lambda|$.

$\exists\, n$ t. że $A^n v = |\lambda|^n (c_n v + s_n w)$

$c_n \to 1$ $s_n \to 0$

zatem

$|\lambda|^n (c_n \underbrace{\|v\|}_{=1} - |s_n|\|w\|) \leq \|A^n v\| \leq \|A^n\| \leq \|A\|^n$

stąd

$|\lambda| \underbrace{(c_n - |s_n|\,\|w\|)^{\frac{1}{n}}}_{\to 1} \leq \|A\|$ $n \to \infty$

$|\lambda| \leq \|A\|$

Dowód:

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - \lambda I) = \det(PBP^{-1} - P(\lambda I)P^{-1}) =$$

$$= \det(P \cdot (B - \lambda I)P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(B - \lambda I)\det(P^{-1}) =$$

$$\varphi_B(\lambda). \quad \blacksquare$$

TW. (ROZKŁAD KANONICZNY JORDANA).

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ma (różne) wartości własne $\lambda_1 \dots \lambda_k$ o krotnościach odpowiednio $n_1, \dots, n_k$ (oczywiście $n = n_1 + \dots + n_k$).

Wtedy macierz A jest podobna do J (czyli w odpowiedniej bazie da się zapisać jako) postaci

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix} \quad J_s \text{ - macierz } n_s \times n_s$$

$$J_s = \begin{pmatrix} C_1(\lambda_s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{ps}(\lambda_s) \end{pmatrix} \quad C_\alpha(\lambda_s) = \lambda_s I + Z$$

I, Z - mac. $k_\alpha \times k_\alpha$

$k_1 + \dots + k_{ps} = n_s$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$ Z - ma jedynki nad przekątną

Inaczej
$$J_s = \begin{bmatrix} \lambda_s & 1/0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_s \end{bmatrix}$$ jedynki lub zera nad przekątną.

J - postać Jordana macierzy A. (zespolona)

Przykłady:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Uwaga: dla $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jeśli są zespolone wartości własne to zmiana bazy też jest zespolona

Kompleksyfikacja nad odpowiedniej tw. dla rzeczywistych

$$\begin{bmatrix} \boxed{A} & I & & \\ & \boxed{A} & I & \\ & & \boxed{A} & \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Nie ma nic specjalnego w kwestii "1" nad przekątną, możemy każdą jedynkę zastąpić dowolną liczbą np.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

~~stosujemy~~ nowa baza $f_1 = e_1$

$f_2 = \cancel{C} \cdot e_2$

$f_1 \longrightarrow \lambda f_1$

$f_2 \longrightarrow \cancel{C} \cdot e_2 = C \cdot (e_1 + \lambda e_2) = C \cdot e_1 + C\lambda e_2 = \frac{1}{C} f_1 + \lambda f_2$

A w bazie (f_1, f_2) $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda & \frac{1}{C} \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Odpowiednia macierz P(stara baza $\to$ nowa baza) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cancel{C} \end{bmatrix}$

$$\tilde{A} = PAP^{-1}$$

TW. Dla każdego $\varepsilon > 0$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (6)

istnieje taka norma $\| \ \|'$ w $\mathbb{C}^n$, że norma operatorowa $\|A\|'$ indukowana przez tę normę spełnia $\|A\|' \leq \rho(A) + \varepsilon$

Dowód:

istnieje baza taka, że

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 \ \varepsilon' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \ \varepsilon' \end{bmatrix} \qquad \varepsilon' = \begin{cases} \varepsilon \\ 0 \end{cases}$$

$\| \ \|'$ - norma $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

$\|A\|' = \max\{\|Ax\|' \mid |x| = 1\}$

$\|(Ax)\|_\infty = \max_i |\lambda_i x_i + \varepsilon'' x_2| \leq \lambda_i + \varepsilon'' < \rho(A) + \varepsilon.$ $\square$

~~TW~~ DEF.

Ciąg $\{A_k^k\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ $(\mathbb{C}^{n \times n})$ jest zbieżny do A

wtw $\lim_{k \to \infty} \|A_k - A\| = 0$.

(to nie zależy od wyboru normy)

wtw $\forall_{i,j}$ $A^k_{i,j} \to A_{i,j}$.

DEF.

Niech $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ - szereg potęgowy o promieniu zb. $\rho > 0$. Dla $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ określamy szereg $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$, o ile szereg po prawej stronie jest zbieżny.

TW. GERSHGORINA

(45. W31)

$A \in \mathbb{R}^n$

$C_i = \{\lambda \mid |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \}$

TW. 1.

Jeśli λ jest wartością własną A, to

$\exists_i \quad \lambda \in C_i$

DOWÓD:

$Ax = \lambda x$, $x_{i_0} = 1$, $|x_i| \leq 1$ dla $i \neq i_0$

$\sum_j a_{i_0 j} x_j - \lambda x_{i_0} = 0$

$(a_{i_0 i_0} - \lambda) x_{i_0} = -\sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} x_j$

$|a_{i_0 i_0} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}|$ ▯

TW. 2 Niech $I \subset \{1, \dots, n\}$

Jeśli $\left(\bigcup_{i \in I} C_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \notin I} C_j\right) = \emptyset$, to

$\bigcup_{i \in I} C_i$ – zawiera dokładnie $\#I$ wartości własnych liczonych z krotnością

Dowód:

kontynuacja od diagonalnej

PROBLEM WŁASNY (45. wł)

$Ax = \lambda x$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$

$\lambda \neq 0$, $x \neq 0$

$\det(A - \lambda Id) = 0$ - wielomian charakterystyczny

pierwiastki = wartości własne.

WPŁYW ZABURZEŃ: na wartości własne

Może ~~być~~ bardzo duży:

$$A = \begin{bmatrix} a & & 0 & & \varepsilon \\ 1 & a & & & 0 \\ & 1 & \ddots & 0 & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a \end{bmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(rozwijam względem 1-ego wiersza)

$$\det(A - \lambda I) = (a-\lambda)^n + (-1)^{n+1}\varepsilon$$

$$a - \lambda = \sqrt[n]{w}\,\varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

$w = \pm 1$

$$\lambda = a - \sqrt[n]{w}\,|\varepsilon|^{\frac{1}{n}}$$

$|\sqrt[n]{w}| = 1$ dla dużych n

$|\varepsilon|^{\frac{1}{n}} \to 1$.

~~Realizacji~~

DLA POJEDYNCZYCH WARTOŚCI WŁASNYCH JEST LEPIEJ.

$\begin{bmatrix} a & \varepsilon \\ \varepsilon & b \end{bmatrix}$

PRZYKŁADY:

1) $\begin{bmatrix} a+\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & b+\varepsilon_2 \end{bmatrix}$ - wartości własne $a+\varepsilon_1$, $b+\varepsilon_2$

2) $\begin{bmatrix} a & \varepsilon \\ \varepsilon & a \end{bmatrix}$ - wartości własne $a \pm \varepsilon$, wekt. wł. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(podwójna wartość własna)

wpływ rzędu ε

3) $\begin{bmatrix} a & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & b \end{bmatrix}$ $\quad a \neq b$

$a > b$

Wielomian charakterystyczny:

$$(a-\lambda)(b-\lambda) - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \lambda^2 - (a+b)\lambda + (ab - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)$$

$$\Delta = (a+b)^2 - 4ab + 4\varepsilon_1\varepsilon_2 = (a-b)^2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} + x^2(\dots)$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(a-b)^2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2} = (a-b)\sqrt{1 + \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{(a-b)^2}} \approx$$

$$= (a-b)\left(1 + \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{(a-b)^2} + \dots\right) = (a-b) + \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{a-b}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{a+b + a-b + \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{a-b}}{2} \approx a + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{a-b}$$

$$\lambda_2 \approx \frac{a+b - a+b - \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2}{a-b}}{2} = b - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{a-b}$$

zmiana jednostajna jako funkcja ε

Rozważmy: $A+\varepsilon B(\varepsilon) = A(\varepsilon)$

| 45. W2

TW.
Jeśli λ_1 - jest pojedynczą wartością własną A, to ~~$\lambda(\varepsilon)$~~ - istnieje funkcja gładka (C^1) $\lambda(\varepsilon)$, oraz $x(\varepsilon)$, takie że

$$(A+\varepsilon B(\varepsilon))\,x(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\,x(\varepsilon) \qquad \lambda(0)=\lambda_1, \quad x(0)\neq 0.$$

$$x(\varepsilon)-\bar{x} = O(\varepsilon)$$
$$\lambda(\varepsilon)-\lambda_1 = O(\varepsilon)$$

DOWÓD:
~~$A\lambda_1 = x$~~ Niech $\bar{x}$ $A\bar{x} = \lambda_1\bar{x}$. Istnieje ~~$i$ $\bar{x}_i \neq 0$.~~
Macierz zmiany bazy U taka, że

$$UAU^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right]$$

więc można założyć, że

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right] \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (A'-\lambda_1 Id)$$
nieodwr.

Mamy rozwiązać równanie:

$$F(x,\lambda,\varepsilon) = \begin{bmatrix} (A+\varepsilon B(\varepsilon))\,x - \lambda x \\ x_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} =0 \\ =0 \end{matrix}$$

$(n+1)$ - równań
na $n+2$ - zmiennych
(dim $x = n$
dim ε = dim $\lambda = 1$)

z TW. O FUNKCJI UWIKŁANEJ:

$$\frac{\partial F}{\partial(x,\lambda)}(x=\bar{x},\lambda=\lambda_1,\varepsilon=0) = \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \left[\begin{array}{c|c} A-\lambda_1 Id & -x \\ \hline 1\,0\,0\ldots & 0 \end{array}\right] \end{array} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & & -1 \\ \hline & A'-\lambda_1 Id & 0 \\ \hline 1 & & 0 \end{array}\right] \longleftarrow \text{macierz nieodwracalna}$$
~~więc ma dokładnie rozw~~

Rozważmy | 45. W2

$A+B$, gdzie B - mała macierz

TW.

Jeśli λ_1 jest pojedynczą wartością własną A, to istnieją funkcje gładkie (C^1) $\lambda(B)$ oraz $x(B)$, takie że

$x(0) \neq 0$

$$(A+B)x(B) = \lambda(B)x(B), \quad \lambda(0) = \lambda_1, \quad \cancel{x(0) \neq 0}$$

$$x(B) - x(0) = O(\|B\|)$$

$$\lambda(B) - \lambda_1 = O(\|B\|).$$

Dowód:

Niech $\bar{x} \neq 0$ wektor własny

$$A\bar{x} = \lambda_1 \bar{x}.$$

Zmieniamy bazę tak, aby (U - macierz zmiany bazy)

$$UAU^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right]$$

dalej zakładamy

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right] \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A' - \lambda_1 Id$ - macierz nieosobliwa.

Mamy rozwiązać równanie

$$F(x, \lambda, B) = \begin{bmatrix} (A+B)x - \lambda x \\ x_1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

mamy $(n+1)$-równań
a niewiadomych: $\underset{\dim X = n}{X}$, $\underset{\dim = 1}{\lambda}$, $\underset{\dim = n^2}{B}$.

użyjemy tw. o funkcji uwikłanej.

Szukamy $x(B), \lambda(B)$ tak aby

$$F(x(B), \lambda(B), B) = 0.$$

$$x(0) = \bar{x} \quad \text{i} \quad \lambda(0) = \lambda_1.$$

potrzeba aby pochodna

$\frac{\partial F}{\partial (x,\lambda)}(\bar{x},\lambda_1,0)$ była izomorfizmem.

$$\frac{\partial F}{\partial (x,\lambda)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial \lambda} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A - \lambda_1 Id & -\bar{x} \\ \hline 1 \; 0 \; 0 \ldots 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & & -1 \\ \hline 0 & A' - \lambda_1 Id & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

macierz nieosobliwa

zatem z tw. o funkcji uwikłanej mamy

$x(B)$, $\lambda(B)$ z gładkości

$$x(B) - \bar{x} = O(\|B\|)$$
$$\lambda(B) - \lambda_1 = O(\|B\|).$$

PERTURBACJE MACIERZY ~~DIAG~~ L 45.4
W POSTACI DIAGONALNEJ. WARTOŚCI WŁASNE

założmy, że λ_1 jest pojedynczą wartością własną macierzy A,
oraz

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array}\right] \implies \lambda_1 \notin Sp(\tilde{A})$$

Niech $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Mamy funkcje $x(B), \lambda(B)$

$x_1(B) = 1 \quad \lambda(0) = \lambda_1$

$$(*) \quad (A + B)\,x(B) = \lambda(B) \cdot x(B).$$

Pokażemy, że pochodna kierunkowa $\lambda(B)$ w kierunku $B = \left[\begin{array}{c|c} 0 & ? \\ \hline ? & ? \end{array}\right]$ jest równa zeru.

Parametryzujemy kierunek $\mathbb{R} \ni \varepsilon \to \varepsilon B$.

czyli $(*)$ przechodzi w

$$(A + \varepsilon B)\,x(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) \cdot x(0) \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_1(\varepsilon) = 1$$

różniczkujemy po ε i podstawiamy $\varepsilon = 0$

$$A \cdot x'(0) + B \cdot x(0) = \lambda'(0) \cdot x(0) + \lambda_1 \cdot x'(0)$$

$$\begin{bmatrix} \overset{\shortparallel}{0} \\ \hline \tilde{A} \cdot x'(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{\shortparallel}{0} \\ \hline B_{21} \\ \vdots \\ B_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda'(0) \\ \hline 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hline \lambda_1 x'(0) \end{bmatrix}$$

stąd $\lambda'(0) = 0$, $x'(0) = (\tilde{A} - \lambda Id)\left(-\begin{bmatrix} B_{21} \\ \vdots \\ B_{n1} \end{bmatrix}\right)$

$\lambda(\varepsilon) - \lambda_1 = O(\varepsilon^2)$

$x(\varepsilon) - \bar{x} = O(\varepsilon)$ $\longleftarrow$ tu nie ma poprawki

OWALE BRAUERA

$A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

$$Sp(A) \subset \bigcup_{i,j} \{ z \mid |a_{ii} - \lambda| \cdot |a_{jj} - \lambda| \leq R_i \cdot R_j \}$$

Dowód:

Niech $AV = \lambda V$ - para własna.

$V = (x_1, \dots, x_n)$

$|x_{i_1}| \geq |x_{i_2}| \geq |x_j| \quad j \neq i_1, i_2$

Jeśli $x_{i_2} = 0$, to oznacza to że wektorem własnym jest i_1- wektor bazowy

więc

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ a_{i_0 i_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right]$$

i_0-kolumna

więc $\lambda \in \{ z \mid |a_{ii} - \lambda| \cdot |a_{jj} - \lambda| \leq R_i R_j \}$ dla dowolnego j

$|x_{i_2}| \neq 0$

mamy 2 rozumowania typu Gerszgorina

$$|\lambda - a_{i_1 i_1}| \leq R_{i_1} \cdot \frac{|x_{i_2}|}{|x_{i_1}|}$$

$$|\lambda - a_{i_2 i_2}| \leq R_{i_2} \cdot \frac{|x_{i_1}|}{|x_{i_2}|}$$

wymnażamy przez siebie

$$|\lambda - a_{i_1 i_1}| \cdot |\lambda - a_{i_2 i_2}| \leq R_{i_1} \cdot R_{i_2}$$

□

JAKIE OSZACOWANIE WYNIKA Z OWALI BRAUERA

załóżmy, że macierz jest prawie diagonalna oraz suma mieszanych przekątnych $R_i \leq \varepsilon \quad \forall i$

$\forall_{i,j} \quad |a_{ii} - a_{jj}| \geq \Delta \quad , \quad \Delta > 2\varepsilon$

$\Delta > 2\varepsilon$ implikuje że koła Gerszgorina się nie przecinają;

Na i-tej wartości własnej mamy oszacowanie

$|\lambda - a_{ii}| \leq R_i$ – z tw. Gerszgorina

$\lambda \in \{|\lambda - a_{ii}| \cdot |\lambda - a_{jj}| \leq R_i \cdot R_j\}$ ∈ owale Brauera

Zobaczmy jakie oszacowanie dostaniemy z owali Brauera.

$|\lambda - a_{ii}| \leq \frac{R_i R_j}{|\lambda - a_{jj}|}$ weźmy $\lambda \in G_i = \overline{B(a_{ii}, R_i)}$

$|\lambda - a_{jj}| = |\lambda - a_{ii} + a_{ii} - a_{jj}| \geq |a_{ii} - a_{jj}| - |\lambda - a_{ii}|$

$\geq \Delta - \frac{\Delta}{2} = \frac{\Delta}{2}$, zatem $|\lambda - a_{ii}| \leq \frac{2 R_i R_j}{\Delta}$

czyli $|\lambda - a_{ii}| \leq \frac{2 R_i}{\Delta} \max R_j$

WEKTORY WŁASNE Z TW. GERSGORINA

Załóżmy, że $G_1 = \overline{B(a_{11}, R_1)}$ jest rozłączny z pozostałymi okręgami Gershgorina (A).

Wtedy ~~dla~~ $\exists! \ \lambda \in G_1$ i $v = (1, v_2, \ldots, v_n)$, $|v_i| \leq 1$

para własna dla A

Dowód:

z rozłączności G_1 od pozostałych kół Gerszgorina

$\Rightarrow \exists! \ \lambda_1 \in G_1$ – wartość własna $\in G_1$

~~zał~~ Niech v – nie spełnia, wtedy dominuje

i-ta współrzędna, z dowodu 1-ego Tw. Gerszgorina wynika, że $\lambda_1 \in G_i(a_{ii}, R_i)$, bo

$$(a_{ii} - \lambda_1) v_i = \sum_{j \neq i} a_{ij} v_j$$

$$|a_{ii} - \lambda_1| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \left|\frac{v_j}{v_i}\right| \leq R_i \Rightarrow \lambda_1 \in G_i$$

ale $\lambda_1 \in G_1$ $\quad G_1 \cap G_i = \emptyset$ sprzeczność.

Przeskalowanie $\tilde{e}_1 = r e_1, \ldots, \tilde{e}_i = i$ $\quad r > 1$

$\tilde{x}_1 = 1$ $\quad |x_i| \leq 1$

$r \cdot \tilde{x}_1 = x_1$ $\quad x_1 = \left(\frac{1}{r}, \underset{x_2}{1}, \ldots, \underset{x_n}{1}\right)$ $\quad \left(\frac{\Delta}{\varepsilon}, \check{1}, \ldots, \check{1}\right)$

czyli $\left(1, \frac{\varepsilon}{\Delta}(1, \ldots, 1)\right)$

KWADRATOWE OSZACOWANIA WARTOŚCI WŁASNYCH Z TW. GERSZGORINA [1] PRZEZ SKALOWANIE

Załóżmy, że koło $\overline{B(a_{11}, R_1)}$ jest rozłączne z pozostałymi i wszystkie elementy poza diagonalą są małe

$|R_i| \leq \varepsilon$, gdzie $R_i = \sum_{j, j\neq i} |a_{ij}|$

$|a_{11} - a_{ii}| \geq \delta$, dla $i \geq 2$.

~~Zmieńmy bazę~~ Załóżmy, że $a_{11} = 0$ (nic to nie zmienia).

Zmieńmy bazę

$\tilde{e}_1 = r e_1$, $\tilde{e}_i = e_i$ $(r > 1)$

Wtedy nasza macierz przechodzi w

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & \\ \vdots & A_{22} \\ a_{n1} & \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} 0 & \frac{1}{r} a_{12} \\ \hline r a_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

interesuje nas $r > 1$

$R_1(\text{nowe}) = \frac{1}{r} R_1(\text{stare})$

ale $R_i(\text{nowe})$ wzrosły

potrzeba nam znaleźć możliwie największe r aby koło Gerszgorina $B(0, \tilde{R}_1)$ było rozłączne z pozostałymi co daje następującą warunek: 2

$\frac{1}{r_1}\varepsilon + r\varepsilon \cancel{<} \Delta$ ← Δ - środek najbliższy

promień $\tilde{R}_1$ koło $\tilde{R}_1$ promień pozostałych

to prowadzi do równania

$$r^2 - \left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right) r + 1 < 0$$

rozwiązania:

$$r \in \left(\frac{\frac{\Delta}{\varepsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right)^2 - 4}}{2} \right)$$

bierzemy np. $r = \frac{\Delta}{\varepsilon}$.
wtedy dostajemy promień: kuli wokół zera

$$\frac{1}{r}\cdot\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{\Delta},$$

czyli jest kwadratowo

WYZNACZANIE WARTOŚCI WŁASNYCH (46)
METODA OBROTÓW JACOBIEGO
DLA MACIERZY SYMETRYCZNYCH

Zakładamy, że $A = A^T$.
Tworzymy ciąg macierzy podobnych
$A^{(k+1)} \sim A^{(k)}$

$$\lim A^{(k)} = \Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$A^{(k+1)} = T^{-1}_{p_k q_k} A^{(k)} T_{p_k q_k}$$

$T_{p_k q_k}$ - obrót Jacobiego.

1° Przykład:
Niech $T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}$

$$B = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} c^2\alpha + s^2\beta + 2cs\gamma & (c^2 - s^2)\gamma - cs(\alpha - \beta) \\ \hline & s^2\alpha + c^2\beta - 2cs\gamma \end{array}\right]$$

dobieram c, s (kąt θ) aby zniknęły wyrazy poza przekątną. $|\theta| \leq \frac{\pi}{4}$

$$(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\gamma - \cos\theta \cdot \sin\theta\,(\alpha - \beta) =$$
$$= \cos 2\theta \cdot \gamma - \frac{1}{2}\sin(2\theta) \cdot (\alpha - \beta)$$

$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\gamma}{\alpha - \beta}$, gdy $\alpha - \beta \neq 0$

gdy $\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0$ $\quad \theta = \pm\frac{\pi}{4}$

Trzeba podkreślić, że transformacja

$T_{p,q}^T A T_{p,q}$

zmienia tylko (p,q)-wiersz
i (p,q)-kolumnę.

z elementów diagonalnych
dotyka jedynie a_{pp} i a_{qq}

$\cancel{T_{p,}}\ T = T_{p,q}$

dla $j \neq p,q$

$$(T^T A T)_{ij} = \underbrace{T^T_{il} A_{lk} T_{kj}}_{\substack{\text{jedyne niezerowe} \\ \text{wyrazy } l=i \\ k=j}} = A_{ij}$$

$i = p$
$j \neq (p,q)$

$$(T^T A T)_{pj} = (T^T)_{pp} A_{pl} T_{lj} + (T^T)_{pq} A_{ql} T_{lj} =$$

$$= T_{pp} A_{pj} + T_{qp} \cdot A_{qj}$$

$$(T^T A T)_{qj} = T_{qq} A_{qj} + T_{pq} A_{pj}$$

$A \cdot T_{p,q}$ – "~~ob~~ miesza" p i q kolumnę

$T_{p,q}^T (\quad)$ – obraca p i q wiersze.

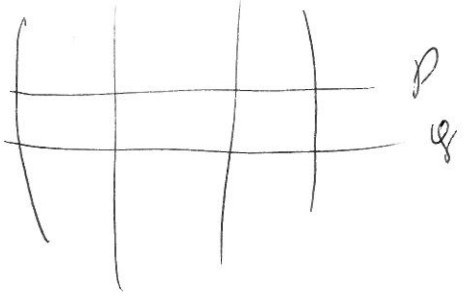
Przypadek ogólny: $A=(a_{ij}) = A^{0}$ (47)

Określam p, q: $|a_{pq}| = \max\{|a_{ij}|, i\neq j\}$

T_{pq} – różni się od mac. jednostkowej ~~ej~~ I

elementami $t_{pp}=t_{qq}=c$, $t_{pq}=-t_{qp}=s$

$c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$ $\qquad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2a_{pq}}{a_{pp}-a_{qq}}$



TW. Metoda Jacobiego jest zbieżna, tzn $A^k \to \Lambda$ - diagonalna

Dowód:

Oznaczmy $N^2(A)=\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = tr(A^TA)$

~~przez~~ transformacja przez obrót Jacobiego nie zmienia $N^2(A)$ ← widać to z obracania wierszy i kolumn.

$$A^{(1)} = T_{pq}^T A T_{pq}$$

$$N^2(A^{(1)T}A^{(1)}) = N^2((T^TAT)^T(T^TAT)) = N^2(T^TA^TTT^TAT) =$$

$$= N^2(T^TA^TAT) = tr(T^TA^TAT) = tr(A^TA) = N^2(A)$$

W zasadzie jest prościej: mnożenie przez ortogonalną nie zmienia

$$N^2(AU) = tr((AU)^TAU) = tr(U^TA^TAU) = tr(A^TA) = N^2(A)$$

$$N^2(UA) = tr((UA)^TUA) = tr(A^TU^TUA) = tr(A^TA) = N^2(A)$$

Wyniku transformacji Jacobiego:

$$\underset{\text{po transformacji}}{b_{pp}^2} + b_{qq}^2 = a_{pp}^2 + 2a_{pq}^2 + a_{qq}^2 \Bigg\} \text{ z pewnych rachunków zastosowanych do } \cancel{\text{tej 2x}} \text{ bloku } (p,q)$$

czyli suma kwadratowych elementów na przekątnej wzrosła o $2a_{pq}^2$ (bo inne elementy z przekątnej się nie zmieniają).

Oznaczmy $t_k^2 = \sum_{i \neq j} |a_{ij}^{(k)}|^2$.

zatem $t_{k+1}^2 = t_k^2 - 2|a_{p_k q_k}^{(k)}|^2$

element o największym module

$$|a^{(k)}_{p_k q_k}|^2 \geq \frac{t_k^2}{n(n-1)}, \text{ więc}$$

$$t_{k+1}^2 \leq t_k^2 - \frac{2t_k^2}{n(n-1)} = t_k^2\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) \leq t^2(A)\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^k$$

zatem $t_k^2 \to 0$.

Oznaczmy $T_k = T_{p_1 q_1} \cdots T_{p_k q_k}$

T_k - unitarna

$\lim T_k = T$ - macierz wektorów własnych macierzy A. (mamy nadzieję, że tak jest)

Uwaga: to nie jest prawdziwy dowód, bo wcale nie wynika z tego że $A^{(k)} \to D$ oraz $T_k \to T$.

Mam wątpliwości co do słuszności (albo prostoty) dowodu dla dwóch identycznych wartości wł...

Dwa pytania: **48/1**

1) ~~czy~~ macierz $A^k \longrightarrow \Lambda$ - diagonalna?

2) czy macierz T_k - złożenie wszystkich transformacji ma granicę?

Ad 1)

co mogłoby pójść źle?

wartości własne mogłyby "skakać".

to nie zachodzi, bo

Niech $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k$ - różne wartości własne z krotnościami $s_1, \ldots, s_k$.

Niech $\varepsilon < \frac{1}{4} \min_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j| = \frac{1}{4} \Delta$

$t_k \longrightarrow 0$, więc $t_k < \frac{\varepsilon}{n}$, $k > k_0$

promienie kół Gershgorina mają promienie $< \varepsilon$.

i dalsze iteracje już tego nie zmienią.

~~Zatem~~ Pozostaje zauważyć, że transformacja przez obrót $T_{p_k q_k}$ nie zamieni nam miejscami λ_i, λ_j ($\lambda_i \neq \lambda_j$) (Szkic dowodu na kolejnej stronie)

48/2

Jeśli w k-tym obrocie: p_*, q_* są takie że $|a_{p_*p_*} - \lambda_p| < \varepsilon$ i $|a_{qq} - \lambda_p| < \varepsilon$ to samo

to obrót "nic" nie zmieni, bo po tej operacji nadal $|a_{pp} - \lambda_p| < \varepsilon$ i $|a_{qq} - \lambda_p| < \varepsilon$ bo suma elementów spoza przekątnej zmalała.

Jeśli p, q są takie, że

$|a_{pp} - \lambda_p| < \varepsilon$ i $|a_{qq} - \lambda_q| < \varepsilon$, gdzie $\lambda_p < \lambda_q$, to wtedy ~~mamy~~ możemy oszacować kąt obrotu:

$$a_{qq} - a_{pp} \geq (\lambda_q - \varepsilon) - (\lambda_p + \varepsilon) = \lambda_q - \lambda_p - 2\varepsilon \geq \Delta - \tfrac{1}{2}\Delta = \tfrac{\Delta}{2}$$

$$|tg\, 2\Theta_k| = \frac{|2a_{pq}|}{|a_{qq} - a_{pp}|} \leq \frac{4|a_{pq}|}{\Delta} \leq \frac{4t_k}{\Delta}$$

stąd $\exists c$ $|\Theta_k| \leq c \cdot t_k$
nie zależy od k.

Dla dostatecznie dużych k $|\Theta_k|$ jest dowolnie małe, więc zmiana macierzy w wyniku obrotu jest mała, więc

$$|a_{qq} - \lambda_p| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |a_{qq} - \lambda_q| < \varepsilon.$$

Ad2) czy macierz T_k ma granicę? | 4 8/3

~~Odpowiedź~~ TAK - gdy $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ - wszystkie wartości własne są jednokrotne.

bo wtedy z poprzedniego wniosku, że kąty obrotów od pewnego momentu szacują się przez $C \cdot t_k$

$\forall t_k \leq D q^k \quad |q| < 1$

więc łączny efekt takich obrotów jest dowolnie mały (suma szeregu geometrycznego

Pozostaje zobaczyć co się dzieje w sytuacji, gdy są wielokrotne wartości własne.

49

w praktyce nie liczy się

$$\Theta = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2a_{pq}}{a_{pp} - a_{qq}}\right)$$

tylko oblicza się $\sin\Theta$ i $\cos\Theta$ bezpośrednio

Oznaczmy (tak aby była zgodność z Ralstonem strona 445) zgodność nie jest pełna bo chyba mam inny znak w obrocie kąta

$\lambda = a_{pq}$

$\mu = \frac{1}{2}(a_{pp} - a_{qq})$. $\qquad \nu = (\lambda^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}$

~~Wtedy równanie na 2Θ wygląda~~

$$\cos\Theta = \left(\frac{|\mu| + \nu}{2\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \sin\Theta = \frac{\lambda \operatorname{sgn}\mu}{2\nu\cos\Theta}$$

Uzasadnienie:

Równanie na zerowanie elementów poza diagonalą

$\lambda \cdot \cos 2\Theta - \mu \sin 2\Theta = 0$ $\qquad \Leftarrow$ dzięki $|\mu|$ $\cos 2\Theta > 0$ $\Updownarrow$ $|\Theta| \le \frac{\pi}{4}$

więc $\begin{bmatrix} \cos 2\Theta \\ \sin 2\Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\mu| \\ \lambda \cdot \operatorname{sgn}\mu \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\nu}$

$\cos 2\Theta = 2\cos^2\Theta - 1 = \frac{|\mu|}{\nu}$ $\qquad \cos^2\Theta = \frac{\nu + |\mu|}{2\nu}$ $\qquad \cos\Theta = \left(\frac{\nu + |\mu|}{2\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\sin 2\Theta = 2\sin\Theta \cdot \cos\Theta = \frac{\lambda \operatorname{sgn}\mu}{\nu}$

$\Downarrow$

$\sin\Theta = \frac{\lambda \operatorname{sgn}\mu}{2\nu\cos\Theta}$.

wybiera się elementy powyżej progów a nie największe

bo obliczenie transformacji jest liniowe.

wyszukanie el. max jest kwadratowe

(52)

WYZNACZANIE WARTOŚCI WŁASNEJ MACIERZY - METODA-QR

METODA QR - uogólnienie metody potęgowej.
(ALGORYTM)

<u>TW.</u> (ROZKŁAD QR)
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Istnieją macierze $Q, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$
Q - ortogonalne, R - trójkątna górna,
takie że $\boxed{A = Q \cdot R}$. gdy A - nieosobliwa,
Q, R - jedno. wtedy i tylko wtedy gdy $R_{ii} > 0 \ \forall i$

Dowód:
wystarczy dokonać ortogonalizacji Grama-Schmidta
kolumn macierzy A.
Q = (otrzymana macierz)
R - też łatwo dostać, ~~bo~~

Q = PODKREŚLIĆ JAK WYGLĄDA KWESTIA
JEDNOZNACZNOŚCI rozkładu!!!
(z dokładnością do wyboru kierunków
wektorów (kolumn) w Q

$$A = \left[\, q_1 \,\middle|\, q_2 \,\middle|\, \ldots \,\right] \qquad q_i \text{ - } i\text{-ta kolumna}$$

Ortogonalizacja – wprowadza nową bazę: $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots \tilde{e}_n)$

$$f_1 = q_1 \;, \quad \tilde{e}_1 = \frac{f_1}{|f_1|}$$

$$f_2 = q_2 - (q_2^T \cdot \tilde{e}_1)\cdot \tilde{e}_1 \;, \quad \tilde{e}_2 = \frac{f_2}{|f_2|}$$

$$f_3 = q_3 - (q_3^T \cdot \tilde{e}_1)\cdot \tilde{e}_1 - (\tilde{q}_3 \cdot \tilde{e}_2)\tilde{e}_2 \;, \quad \tilde{e}_3 = \frac{f_3}{|f_3|}$$

$\vdots$ i tak dalej

$$Q = \left[\, \tilde{e}_1 \,\middle|\, \tilde{e}_2 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, \tilde{e}_n \,\right]$$ – ortogonalna przejście z bazy $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ do $(e_1, \ldots, e_n)$

R – macierz odwzorowania A – wyrażona w bazie $(e_1, \ldots, e_n)$ – na wejściu i w bazie $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ – na wyjściu

$$R: \quad \begin{aligned} e_1 &\longrightarrow f_1 = |f_1| \cdot \tilde{e}_1 \\ e_2 &\longrightarrow (q_2 \cdot \tilde{e}_1)\tilde{e}_1 + |f_2|\tilde{e}_2 \\ e_3 &\longrightarrow (q_3 \cdot \tilde{e}_1)\tilde{e}_1 + (q_3 \cdot \tilde{e}_2)\tilde{e}_2 + |f_3|\tilde{e}_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$\longleftarrow$ ~~dolna~~ trójkątna górna.

ALGORYTM Q-R

Określam ciągi $\{Q_k\}$, $\{R_k\}$ $\{A_k\}$

$A_1 = A$, $A_1 = Q_1 \cdot R_1$, Q_i - ortogonalna
R_i - Δ - górna

$A_2 = R_1 Q_1$, $A_2 = Q_2 \cdot R_2$

$A_3 = R_2 Q_2, \ldots$

$A_k = Q_k \cdot R_k = R_{k-1} \cdot Q_{k-1}$.

PRZEJŚCIE:

$A_k \longrightarrow A_{k+1}$

$A_k = Q_k \cdot R_k \Longrightarrow R_k = Q_k^T A_k$

$A_{k+1} = R_k \cdot Q_k = Q_k^T A_k Q_k$

A_{k+1} i A_k - macierze podobne.

$A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k = Q_k^T Q_{k-1}^T A_{k-1} Q_{k-1} Q_k = Q_k^T \cdots Q_1^T A_1 Q_1 \cdots Q_k$

$\boxed{A_{k+1} = P_k^T A_1 P_k}$, gdzie

$P_k = Q_1 \cdots Q_k$.

53

CO MA ALGORYTM Q-R wspólnego z metodą potęgową?

1) Pierwszy kierunek to nic innego jak proces $q_{n+1} = \frac{Aq_n}{\|Aq_n\|}$ z metody potęgowej

2) Dwie pierwsze kolumny to iterowanie podprzestrzeni

$$\langle e_1, e_2 \rangle \longrightarrow \langle Ae_1, Ae_2 \rangle = \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle$$

$\tilde{e}_1$ – to jest

TW. O ZBIEŻNOŚCI METODY QR

Niech $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ będzie taka, że moduły wartości własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są różne

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots |\lambda_n| \ (>0)$$

Niech $A = Y^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Y$. Założmy, że Y ma rozkład LU, $Y = LU$.

Wtedy (jest to zbieżność z dokładnością do znaku) części dolnotrójkątna $A_k \to 0$ a na przekątnej jest zbieżność do

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

UWAGA:

1) $Y = X^{-1}$, gdzie X - baza wektorów własnych uporządkowana zgodnie z $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

2) Jest to warunek "otwarty" (blisko też spełnia je).

UWAGI:

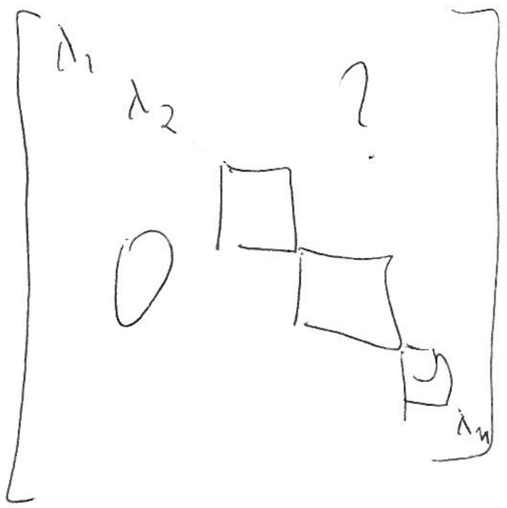
1) DLA rzeczywistych wartości własnych bez ??. klatek Jordana o wymiarze ≥ 2, jest zbieżność do ~~diagon~~ do górno-Δ

$|\lambda_n| > 0$ i wartości własne na przekątnej mogą być niedokładne (bez dowodu)

2) Warunek $Y = LU$ - nie jest konieczny. (dowiodł Tuchulij?)

3) W przypadku zespolonych wartości własnych na przekątnej pojawiają się bloki odpowiadające wartościom wł. urojonym, reszta jest zbieżna

tzn.

$A_k \longrightarrow$ 

może być trudne rozpoznanie bloku.

PRZYKŁAD "ZESPOLONY"

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$Q_1 = A_1$, $R_1 = I$

$A_2 = R_1 Q_1 = A_1$

wartości własne $e^{\frac{1}{2} i \pi r}$ $r = 0, 1, 2, 3$

JAK DIAGONALIZACJA WYGLĄDA NA POZIOMIE MACIERZY

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - różne wartości własne A

$\mathcal{D} = diag(\lambda_i)$

$X_1, \dots, X_n$ - wektory własne , $X = [X_1, \dots, X_n]$

$$AX = X \cdot \mathcal{D}$$

$$A = X \cdot \mathcal{D} X^{-1} \qquad X^{-1} A X = \mathcal{D}$$

Proces ortogonalizacji Grama-Schmidta do $X_1, \dots, X_n$ daje macierz $Q = [Q_1, \dots, Q_n]$, R - górno-Δ ,

$$X = Q \cdot R$$

Q_1 - wektor własny X_1

Q_2 - rozpięty przez X_1, X_2

Q_i - rozpięty przez $X_1, X_2, \dots, X_i$

Jak A wygląda w basie $Q_1, \dots, Q_n$

$$A Q_1 = \lambda_1 Q_1$$

$$A Q_2 = A(aX_1 + bX_2) = a\lambda_1 \cancel{X_1} + b\lambda_2 \cancel{X_2} = \text{rozpięty przez } Q_1, Q_2$$

$$AQ_i \ - \ \text{rozpięty przez } Q_1, \dots, Q_i$$

A w tej basie jest górno-Δ.

FORMALNY RACHUNEK:

trzeba policzyć $Q^{-1}AQ$.

$\cancel{Q^{-1}}\ Q = X \cdot R^{-1}$, $Q^{-1} = R X^{-1}$

odwrócić

zatem $Q^{-1}AQ = R\underbrace{X^{-1}AX}_{=D}R^{-1} = RDR^{-1}$ – iloczyn 3-rzech macierzy jest .

ZBIEŻNOŚĆ ALGORYTMU ~~METODY~~ QR-~~DIAGONALIZACJI~~

Algorytm

$A_s = Q_s R_s$ (przypomnienie notacji) Q_s - ortogonalna
R_s - górnotrójkątna

$$A_{s+1} = Q_s^T A_s Q_s = Q_s^T Q_s R_s Q_s = R_s Q_s.$$

CEL: zrozumieć co się dzieje z P_s

$$A_{s+1} = Q_s^T \cdot \ldots \cdot Q_2^T Q_1^T A_1 Q_1 Q_2 \ldots Q_s$$

$$Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_{s-1} Q_s \cdot A_{s+1} = A_1 Q_1 Q_2 \ldots Q_s$$

$$P_s = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_s \qquad A_{s+1} = P_s^T A_1 P_s$$

$$U_s = R_s \cdot R_{s-1} \cdot \ldots \cdot R_1$$

wtedy

$$P_s U_s = Q_1 \ldots (Q_s \cdot R_s) R_{s-1} \cdot \ldots \cdot R_1 = Q_1 \ldots Q_{s-1} A_s R_{s-1} \ldots R_1 =$$
$$= A_1 \cdot Q_1 \ldots Q_{s-1} R_{s-1} \ldots R_1 = A_1^2 \cdot Q_1 \ldots Q_{s-2} R_{s-2} \ldots R_1 =$$
$$= A_1^s = A^s$$

(zatem mamy też rozkład QR dla A^s)

Załóżmy

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n| > 0$$

$$A_1^s = X \operatorname{diag}(\lambda_i^s) X^{-1} = X D^s X^{-1} =$$
$$= X D^s Y$$

X - kolumny to wektory własne

Niech

$X = QR$, Q - ortogonalna, R - górno-Δ ← zawsze istnieje

$Y = L \cdot U$, L - ~~Δ-trójk~~ dolnotrójkątna, $L_{ii} = 1$ $\forall i$, U - górno-Δ ← może nie istnieć

R - nonsingularna, bo X - nieosobliwa

$$A_1^s = \underbrace{Q\cdot R}_{=X} \cdot D^s \underbrace{L\cdot U}_{=Y} = (QR)(D^s L D^{-s}) D^s U$$

D^{-s} – istnieje gdy $|\lambda_n|>0$
gdy $|\lambda_n|=0$ to $(D^{-s})_{nn}=0$ i tyle.

$$(D^s L D^{-s})_{ij} = l_{ij}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^s$$ – dolno-Δ, z jedynkami na przekątnej

$$D^s L D^{-s} = I + E_s,$$ gdzie $E_s \to 0$ dla $s\to+\infty$
bo pod przekątną $i>j$, $|\lambda_i| < |\lambda_j|$. $E_s = 0$ na przekątnej i powyżej

$$A_1^s = QR(I+E_s)D^sU = Q(I+RE_sR^{-1})RD^sU =$$

$$= Q(I+F_s)RD^sU$$ gdzie $F_s \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$

$$I+F_s = \tilde{Q}_s \tilde{R}_s$$ – rozkład Q-R
wtedy $\tilde{Q}_s \to Id$
$\tilde{R}_s \to Id$.

zatem

$$A_1^s = \underbrace{(Q\tilde{Q}_s)}_{\text{ortogonalna}}\underbrace{(\tilde{R}_s R D^s U)}_{\text{górno-Δ}}$$ – (Q·R rozkład.)

Pamiętamy, że

$$A_1^s = \underset{\text{orto.}}{P_s} \cdot \underset{\text{górno-Δ}}{U_s}$$ – (inny rozkład QR)
$\ne 0$ o ile A^s – nieosobliwa więc $|\lambda_n|>0$

$Q\tilde{Q}_s$ i P_s mają identyczne kolumny, tylko inne znaki

$$Q\tilde{Q}_s \cdot \mathcal{E}^s = P_s,$$ $\mathcal{E}^s_{ii} = \pm 1$ i $\mathcal{E}^s_{ij} = 0$ $i\ne j$.

KWESTIA ZBIEŻNOŚCI: A_s^*

pamiętamy, że

$$A_{s+1} = P_s^T A_1 P_s$$

$$\tilde{Q}_s = I + \tilde{C}_s \quad , \quad \tilde{C}_s \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$$

$$P_s = Q(I+\tilde{C}_s)\mathcal{E}_s = Q\mathcal{E}_s + C_s \quad , \quad \text{gdzie } C_s \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$$

$$\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_s^T$$

$$A_{s+1} = \left(\mathcal{E}_s Q^T + C_s^T\right) A_1 \left(Q\mathcal{E}_s + C_s\right) =$$

$$= \mathcal{E}_s \underbrace{Q^T A_1 Q}_{} \mathcal{E}_s + \underbrace{\mathcal{E}_s Q^T A_1 C_s + C_s^T A_1 Q\mathcal{E}_s + C_s^T A_1 C_s}_{\downarrow s\to 0 \quad 0}$$

, bo $C_s \to 0$.

górno Δ z wartościami własnymi na przekątnej.

to jest miejsce gdzie używamy rozwiązań: jak A wygląda w bazie X - zortogonalizowanej

zauważmy, że

$$\mathcal{E}_s \cancel{A} \mathcal{E}_s = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

~~mnożymy kolumny~~ i-ty wiersz ε_{ii}

— mnożymy i-tą kolumnę przez ε_{ii}

więc elementy poza przekątną mogą oscylować

podobnie się dzieje z P_s

w szczególności skoki znaku dla ujemnych wartości własnych.